

دفترچه

شماره

۳



در زمینه مسائل علمی باید دنبال قله بود.
مقام معظم رهبری

دفترچه شماره ۳

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون اختصاصی (سراسری) ورودی دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی نوبت اول - اردیبهشت سال ۱۴۰۴

گروه آزمایشی علوم تجربی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخگویی	ملاحظات
۱	ریاضی	۳۰	۱۱۱	۱۴۰	۶۰ دقیقه	۴۵ سؤال ۶۰ دقیقه
۲	زمین شناسی	۱۵	۱۴۱	۱۵۵		

این آزمون، نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

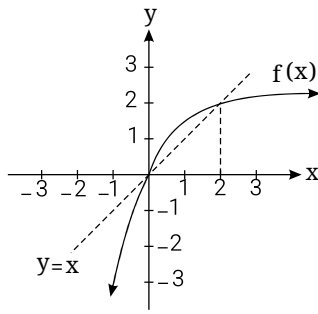
حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز است و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.



@Gamas20



@Gamas20



۱. مجموعه جواب نامعادله $x^2 - xf(x) < 0$ به کدام صورت است؟

- (۱) $(-\infty, 0)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(2, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

۲. اگر $f(x) = ax^2 + bx - c$ و $g(x) = x + a$ و $f(g(x)) = x^2 + 4x - 5$ باشد، c کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌های آن $3 - \sqrt{5}$ باشد کدام است؟

- (۱) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (۲) $x^2 - 6x + 4 = 0$ (۳) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (۴) $x^2 - 3x + 1 = 0$

۴. حاصل $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \dots + \cos \frac{6\pi}{7}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

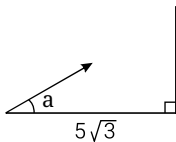
۵. اگر میانگین ۹ عدد ۲۰، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و a ، برابر ۱۳ باشد، میانه‌ی آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۶. مطابق شکل زیر، گلوله‌ای در فاصله $5\sqrt{3}$ متری از یک دیوار با سرعت $10 \frac{m}{s}$ و با زاویه حاده α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. می‌دانیم

مسافت افقی طی شده (d) برحسب سرعت پرتاب گلوله (v) و زاویه پرتاب (α) از رابطه $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ به دست می‌آید. حدود α باشد تا

گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند؟



- (۱) $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{8}$ (۴) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3}$

۷. تابع $f(x) = \begin{cases} |x-3| & x \geq 2 \\ |x^2-1| & x < 2 \end{cases}$ ، در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۸. اگر تابع f با ضابطه $f(x) = a[x] + 2[1-x]$ در $x_0 = 2$ دارای حد باشد، مقدار عددی a کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹. در یک مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

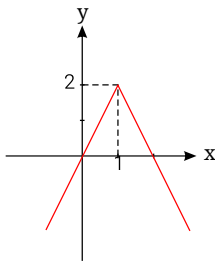
۱۰. در مستطیل $ABCD$ از رأس A ، پاره خط AH را بر قطر BD عمود می‌کنیم، طوری که $HB = 3DH$. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی وسط ضلع AB از قطر مستطیل برابر $2\sqrt{3}$ باشد. آن‌گاه اندازه‌ی ضلع AD چقدر است؟

$3\sqrt{6}$ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)

۸ (۲)

۱۲ (۱)



۱۱. نمودار تابع $f(x) = a|x - b| + c$ در زیر رسم شده است. حاصل $ab - c$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۴ (۳)

+۴ (۲)

صفر (۱)

۱۲. تابع $f(n) = n^2 - 5n + 6$ مفروض است. اگر دامنه‌ی آن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد. بُرد تابع f چند عضو دارد؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۳. انحراف معیار دو داده‌ی $\sin \theta$ و $\cos \theta$ کدام است؟

$\frac{|\sin \theta + \cos \theta|}{2}$ (۴)

$\frac{|\sin \theta - \cos \theta|}{2}$ (۳)

$\frac{\sin \theta - \cos \theta}{2}$ (۲)

$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2}$ (۱)

۱۴. دو ضلع مقابل یک مربع بر دو خط به معادلات $y = 2x - 1$ و $ky + 7 = x$ واقع هستند. مساحت این مربع کدام است؟

$4,5$ (۴)

$4,1$ (۳)

$4,05$ (۲)

$4,01$ (۱)

۱۵. طول و عرض مستطیلی ۲ و ۶ می‌باشد. از دوران مستطیل حول ضلع بزرگ‌تر و با زاویه‌ی 90° شکل به‌دست می‌آید. حجم شکل کدام است؟

12π (۴)

24π (۳)

8π (۲)

6π (۱)

۱۶. اگر $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{\sqrt[5]{4x^3 - 1}}{2}$ و $(g^{-1} \circ f)(x) = \sqrt[n]{ax^m + b}$ ، آن‌گاه حاصل $ab + m \cdot n$ کدام است؟

$\frac{33}{2}$ (۴)

۱۷ (۳)

$\frac{31}{2}$ (۲)

۱۵ (۱)

۱۷. تمام قائم‌های وارد بر منحنی $5 = 4y - 2x + y^2 + x^2$ از کدام نقطه ثابت می‌گذرند؟

$(-1, -1)$ (۴)

$(1, 2)$ (۳)

$(1, 1)$ (۲)

$(-1, -2)$ (۱)

۱۸. اگر C نقطه اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه C ، کدام وضعیت را دارد؟

اکسترمم نسبی (۴)

مشتق‌پذیر (۳)

خط مماس افقی (۲)

پیوسته (۱)

۱۹. تابع f بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. اگر به ازای $a \geq a_0$ بدانیم $g(x) = \sqrt{f^2(x) + f(x) + 3a}$ و همچنین $g(x)$ نیز روی R پیوسته باشد، کمترین مقدار a_0 کدام است؟

- ☐ ۱ $\frac{1}{6}$
☐ ۲ $\frac{1}{12}$
☐ ۳ $\frac{1}{18}$
☐ ۴ $\frac{1}{32}$

۲۰. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $5x - 1$ برابر r باشد آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $3f(x)$ بر $x - \frac{1}{5}$ کدام است؟

- ☐ ۱ $\frac{1}{5}r$
☐ ۲ $3r$
☐ ۳ $\frac{5}{3}r$
☐ ۴ $\frac{3}{5}r$

۲۱. تعداد کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر است. اگر کارمند مردی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه دارای تحصیلات دانشگاهی باشد، کدام است؟

	زن	مرد
دارای تحصیلات دانشگاهی	۲۰	۲۵
فاقد تحصیلات دانشگاهی	۷۰	۸۵

- ☐ ۱ $\frac{15}{22}$
☐ ۲ $\frac{5}{22}$
☐ ۳ $\frac{17}{22}$
☐ ۴ $\frac{7}{22}$

۲۲. مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = 2x\sqrt{x} - x^2$ در فاصله $[1, 4]$ کدام است؟

- ☐ ۱ ۱
☐ ۲ $\frac{27}{16}$
☐ ۳ $\frac{7}{4}$
☐ ۴ $\frac{13}{8}$

۲۳. نقطه $A(2, -1)$ بر تابع $y = 2f(-2x + 1) - 3$ واقع است. اگر این تابع به $y = f(4x + 1)$ تبدیل شود نقطه A' واقع بر تابع جدید متناظر A خواهد بود. مختصات A' کدام است؟

- ☐ ۱ $(-1, -1)$
☐ ۲ $(1, -1)$
☐ ۳ $(1, 1)$
☐ ۴ $(-1, 1)$

۲۴. تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ را با کدام تبدیل‌ها می‌توان به تابع $g(x) = -x^2$ تبدیل کرد؟

۱ انتقال عمودی یک واحد به پایین، انتقال افقی ۲ واحد به چپ و قرینه‌سازی نسبت به محور y ها.

۲ انتقال عمودی یک واحد به پایین، انتقال افقی ۲ واحد به راست و قرینه‌سازی نسبت به محور x ها.

۳ قرینه‌سازی نسبت به محور x ها، انتقال عمودی یک واحد پایین و انتقال افقی ۲ واحد به راست.

۴ قرینه‌سازی نسبت به محور x ها، انتقال عمودی یک واحد به بالا و انتقال افقی ۲ واحد به چپ.

۲۵. مجموعه‌های دوبه‌دو متمایز A ، B و C غیر تهی هستند و $C \subset (A \cap B)$ است. آن‌گاه کدام گزینه همواره درست نیست؟

- ☐ ۱ $C \subset A$
☐ ۲ $C \subset (A \cup B)$
☐ ۳ $(C \cap B) \subset (A \cap C)$
☐ ۴ $(C \cup A) \subset B$

۲۶. در دنباله ای $t_1 = 2$ و $t_{n+1} = 5t_n$ است، جمله عمومی این دنباله کدام است؟

- ☐ ۱ $2 + 5n$
☐ ۲ $1 + 2n$
☐ ۳ 2×5^n
☐ ۴ $2 \times 5^{n-1}$

۲۷. ۷۰ نفر از یک نمایشگاه کتاب خرید کرده‌اند. ۳۲ نفر «دیوان حافظ» و ۳۳ نفر «مثنوی معنوی» خریده‌اند. اگر تعداد افرادی که هر دو کتاب را خریده‌اند نصف کسانی باشد که هیچ‌کدام را نخریده‌اند چند نفر فقط «مثنوی معنوی» خریده‌اند؟

- ☐ ۱ ۲۷
☐ ۲ ۲۸
☐ ۳ ۲۹
☐ ۴ ۳۰

۲۸. اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 2x + 3$ بر $x + 1$ ، برابر صفر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

-۱۷ (۴)

-۱۳ (۳)

۲۳ (۲)

۲۷ (۱)

۲۹. با حروف کلمه «فارسی»، کلمه‌ای ۳ یا ۴ حرفی می‌سازیم. با کدام احتمال این کلمه حرف «نقطه‌دار» دارد؟

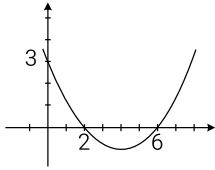
۰٫۶ (۴)

۰٫۷ (۳)

۰٫۸ (۲)

۰٫۹ (۱)

۳۰. اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت روبه رو باشد، $4a + b$ کدام است؟



-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۱. کدام مورد ویژگی کهکشان راه شیری را به درستی بیان می کند؟

- ۱) بزرگ ترین کهکشان شناخته شده در کیهان
۲) دارای سیاهچاله مرکزی و قطری حدود ده هزار سال نوری
۳) قرار داشتن منظومه شمسی در مرکز بازوهای مارپیچی آن
۴) نواری مه مانند و کم نور و شامل انبوهی از اجرام در شب های صاف

۲. راه تشکیل امواج R زمین لرزه کدام است؟

- ۱) بازتاب امواج P و S با سطح زمین
۲) برخورد امواج سطحی با فصل مشترک افق
۳) حرکت در راستای چرخش امواج دریا
۴) برخورد امواج درونی با فصل مشترک لایه ها در سطح زمین

۳. بر اثر بهره برداری از یک آبخوان در یک دشت به مساحت ۲۰۰ کیلومتر مربع و تخلخل ۳۰ درصد، سطح ایستابی ۱۰ متر افت کرده است، چنانچه

حجم آب تخلیه شده از این آبخوان در طی ۳۰ روز پمپاژ شود، میانگین آبدهی چاه ها تقریباً چقدر بوده است؟ (بر حسب $\frac{m^3}{s}$)

۱) ۵۴٫۰۱ ۲) ۶۹٫۴ ۳) ۲۳۱ ۴) ۴۸۴٫۷

۴. کدام یک از مطالعات در آزمایشگاه های سنگ و خاک انجام می شود؟

- ۱) نوع تخلخل ۲) حجم رسوبات ۳) مقدار نفوذپذیری ۴) درصد اشباع شدگی

۵. کدام عبارت، لوم ($Loam$) را بهتر معرفی می کند؟

- ۱) مخلوطی از ماسه، لای و رس ۲) بخش آلی خاک های کشاورزی
۳) آب های محبوس شده در اعماق زمین ۴) ذرات رسوبی بزرگ تر از رس و کوچک تر از ماسه

۶. عنصری که با نقش آنزیمی در بدن مانع ایجاد سرطان می شود نام دارد.

- ۱) کادمیم ۲) روی ۳) سلنیم ۴) آرسنیک

۷. کدام سنگ دگرگونی تکیه گاه مناسبی برای ساخت سازه ها نیست؟

- ۱) شیست ۲) شیل ۳) سنگ گچ ۴) هورنفلس

۸. کدام یک از ژئوپارک های زیر در کشور ما به ثبت جهانی رسیده است؟



۲



۱



۴



۳

۹. در کدام گزینه هر دو مورد را می توان نوعی گوهر به حساب آورد؟

- ۱) الماس - ژئیس ۲) زبرجد - زمرد ۳) آمتیست - کلسیت ۴) فیروزه - کلسیت

۱۰. در توزیع آب زیرزمینی نزدیک ترین بخش به سنگ بستر کدام است؟

- ۱) منطقه تهویه ۲) حاشیه مویینه ۳) منطقه اشباع ۴) سطح ایستابی

۱۱. در سطح مقطع یک رودخانه به شکل نیم‌دایره و به عرض ۱۰ متر، سرعت آب $\frac{m}{s}$ ۲۰ است. دبی این رودخانه چند متر مکعب بر ثانیه است؟

۷۸۵ (۴)

۶۲۸ (۳)

۶۲۸۰ (۲)

۱۵۷۰ (۱)

۱۲. تعیین کیفیت یک ماده معدنی توسط کدام یک از روش‌های زیر انجام می‌شود؟

(۲) بررسی‌های میکروسکوپی و تجزیه شیمیایی

(۱) بررسی نقشه‌های زمین‌شناسی و بازدیدهای محرابی

(۴) تحلیل نرم‌افزاری داده‌های زمین‌شناسی

(۳) نمونه‌برداری و حفاری با دستگاه‌های پیشرفته

۱۳. به علت بیلان منفی آب بسیاری از دشت‌های کشور از نظر توسعه بهره‌برداری آب‌های زیرزمینی به عنوان اعلام شده است.

(۴) مناطق خشک

(۳) دشت ممنوعه

(۲) دشت خندقی

(۱) مناطق فرونشست

۱۴. در صورتی که لایه‌های رسوبی، یک تاقدیس را به وجود آورند، ترین سنگ‌ها در مرکز قرار گرفته و شیب لایه‌ها است.

(۱) قدیمی - به سمت مرکز قرار می‌گیرد. (۲) قدیمی - از مرکز دور می‌شود. (۳) جدید - به سمت مرکز قرار می‌گیرد. (۴) جدید - از مرکز دور می‌شود.

۱۵. کدام عبارت در مورد زمین‌لرزه صحیح است؟

(۲) تعداد زیادی از زمین لرزه‌ها قبل از وقوع پیش‌بینی شده‌اند.

(۱) شدت زمین‌لرزه با فاصله از مرکز سطحی رابطه عکس دارد.

(۴) شدت زمین‌لرزه با کمک اطلاعات لرزه‌نگار به دست می‌آید.

(۳) بزرگی زمین‌لرزه مقیاس مشاهده‌ای بوده که در تمام نقاط زمین، یکسان است.

پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۳

$$xf(x) - x^r < 0 \Rightarrow x(f(x) - x) < 0$$

مطابق شکل در فاصله $(0, 2)$ تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد یعنی $f(x) - x > 0$ و در فاصله $(2, +\infty) \cup (-\infty, 0)$ پایین خط $y = x$ قرار دارد یعنی $f(x) - x < 0$ می‌شود.

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x		$-$	$+$	$+$
$f(x) - x$		$-$	$+$	$-$
$x(f(x) - x)$		$+$	$+$	$-$

$\Rightarrow x \in (2, +\infty)$

۲. گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} fog(x) &= f(g(x)) = a(x+a)^r + b(x+a) - c \\ &= ax^r + ra^rx + a^r + bx + ab - c \\ &= ax^r + (ra^r + b)x + a^r + ab - c \end{aligned} \right\}$$

با مقایسه‌ی این عبارت با $fog(x) = x^r + 4x - 5$ به این نتیجه می‌رسیم که:

$$a = 1, \quad ra^r + b = 4 \rightarrow r + b = 4 \rightarrow b = 4 - r, \quad a^r + ab - c = -5 \rightarrow 1 + r - c = -5 \rightarrow c = r + 6$$

۳. گزینه ۲ در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا اگر یک ریشه‌ی معادله، $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد ریشه‌ی دیگر $\alpha - \sqrt{\beta}$ است پس ریشه‌ی دیگر معادله $\sqrt{5} + 3$ می‌باشد. در نتیجه:

$$x_1 = 3 - \sqrt{5}, \quad x_r = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_r = 6 \\ P = x_1 \times x_r = (3 - \sqrt{5}) \times (3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

$$x^r - Sx + P = 0 \rightarrow x^r - 6x + 4 = 0$$

۴. گزینه ۱

روش اول:

$$\cos \frac{6\pi}{v} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{v}\right) = -\cos \frac{\pi}{v}$$

$$\cos \frac{5\pi}{v} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{v}\right) = -\cos \frac{2\pi}{v}$$

$$\cos \frac{4\pi}{v} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{v}\right) = -\cos \frac{3\pi}{v}$$

$$\cos \frac{\pi}{v} + \cos \frac{2\pi}{v} + \dots + \cos \frac{6\pi}{v} = \cos \frac{\pi}{v} + \cos \frac{2\pi}{v} + \cos \frac{3\pi}{v} + (-\cos \frac{3\pi}{v}) + (-\cos \frac{2\pi}{v}) + (-\cos \frac{\pi}{v}) = 0$$

روش دوم: می‌دانیم: $\alpha + \beta = \pi \rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{v} + \frac{6\pi}{v} &= \pi \rightarrow \cos \frac{\pi}{v} + \cos \frac{6\pi}{v} = 0 \\ \frac{2\pi}{v} + \frac{5\pi}{v} &= \pi \rightarrow \cos \frac{2\pi}{v} + \cos \frac{5\pi}{v} = 0 \\ \frac{3\pi}{v} + \frac{4\pi}{v} &= \pi \rightarrow \cos \frac{3\pi}{v} + \cos \frac{4\pi}{v} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{v} + \cos \frac{2\pi}{v} + \dots + \cos \frac{6\pi}{v} = 0$$

۵. گزینه ۳

$$\frac{a + 7 + 10 + 14 + 11 + 16 + 18 + 9 + 20}{9} = 13$$

$$\rightarrow a + 105 = 117 \rightarrow a = 12$$

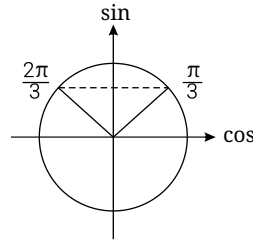
داده‌ها به صورت ۲۰ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۷ درمی‌آیند که میانه برابر ۱۲ است.

۶. گزینه ۲ برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصله افقی طی شده آن بزرگ‌تر از $5\sqrt{3}$ باشد، پس داریم:

$$d > 5\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v^r \sin 2\alpha}{10} > 5\sqrt{3} \xrightarrow{v=10} \sin 2\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون α زاویه حاده است، پس 2α از 0 تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. طبق دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$$



به ازای $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\alpha = \frac{\pi}{6}$ گلوله پای دیوار فرود می آید و به ازای $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می کند.

۷. گزینه ۳ واضح است که تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق پذیر نیست.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 3| = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x^2 - 1| = 3$$

از طرف دیگر اگر $x = \alpha$ ریشه ساده چند جمله ای g باشد، تابع $y = |g(x)|$ مشتق پذیر نیست. پس تابع $y = |x - 3|$ در $x = 3$ و تابع $y = |x^2 - 1|$ در $x = \pm 1$ مشتق پذیر نیستند. بنابراین تابع f در چهار نقطه مشتق پذیر نیست.

۸. گزینه ۲ کافی است حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در $x = 2$ با یکدیگر برابر قرار بدهیم. لذا داریم:

$$x \rightarrow 2^+ : x > 2 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 2 \\ -x < -2 \Rightarrow 1 - x < -1 \Rightarrow [1 - x] = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} a[x] + 2[1 - x] = 2a + 2(-2) = 2a - 4$$

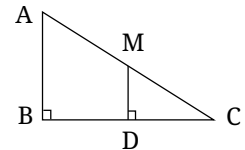
$$x \rightarrow 2^- : x < 2 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \\ -x > -2 \Rightarrow 1 - x > -1 \Rightarrow [1 - x] = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} a[x] + 2[1 - x] = a(1) + 2(-1) = a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow 2a - 4 = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

۹. گزینه ۳

$$MD \perp BC \Rightarrow MD \parallel AB \Rightarrow \triangle MCD \sim \triangle ABC$$



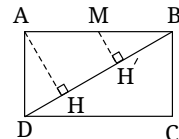
چون نسبت تشابه ۲ است.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MDC}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

۱۰. گزینه ۲

نقطه ی وسط AB را M می نامیم، بنابر داده های مسئله $MH' = 2\sqrt{3}$ و چون دو مثلث $MH'B$ و ABH متشابه اند، پس:

$$\frac{MH'}{AH} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 4\sqrt{3}$$



ولی در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی دو قطعه ی پدید آمده روی وتر است، در نتیجه داریم:

$$AH^2 = DH \cdot HB \Rightarrow (4\sqrt{3})^2 = DH \times 3DH$$

$$\Rightarrow 3DH^2 = 48 \Rightarrow DH = 4$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$$

۱۱. گزینه ۳ چون تابع یک واحد به سمت راست رفته است بنابراین $b = 1$ است.

چون رأس نمودار ۲ واحد بالا رفته است بنابراین $C = ۲$ است.

چون تابع از $(۰, ۰)$ عبور می‌کند خواهیم داشت:

$$a|۰ - ۱| + ۲ = ۰ \Rightarrow a = -۲ \Rightarrow a \times b - c = -۲ - ۲ = -۴$$

۱۲. گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} f(۱) &= (۱)^۲ - ۵(۱) + ۶ = ۲ \\ f(۲) &= (۲)^۲ - ۵(۲) + ۶ = ۰ \\ f(۳) &= (۳)^۲ - ۵(۳) + ۶ = ۰ \\ f(۴) &= (۴)^۲ - ۵(۴) + ۶ = ۲ \\ f(۵) &= (۵)^۲ - ۵(۵) + ۶ = ۶ \end{aligned} \right\} \rightarrow R_f = \{۰, ۲, ۶\}$$

در نتیجه بُرد f ، ۳ عضو است.

۱۳. گزینه ۳ می‌دانیم ۲ (میانگین) - $\frac{\text{مجموع مربعات}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \sigma^۲$ پس:

$$\begin{aligned} \sigma^۲ &= \frac{\sin^۲ \theta + \cos^۲ \theta}{۲} - \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{۲} \right)^۲ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱ + ۲ \sin \theta \cos \theta}{۴} = \frac{۲ - ۱ - ۲ \sin \theta \cos \theta}{۴} = \frac{۱ - ۲ \sin \theta \cos \theta}{۴} \\ &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)^۲}{۴} \Rightarrow \sigma = \frac{|\sin \theta - \cos \theta|}{۲} \end{aligned}$$

نکته: انحراف معیار دو داده a و b برابر است با:

$$\sigma = \frac{|a - b|}{۲}$$

۱۴. گزینه ۲ چون گفته شده، دو ضلع مقابل پس این دو ضلع روبه‌روی هم هستند پس شیب دو خط داده شده با هم برابر است.

$$\left\{ \begin{aligned} y &= ۲x - ۱ \rightarrow m = ۲ \\ ۲y + kx &= ۷ \rightarrow m' = -\frac{k}{۲} \rightarrow \frac{-k}{۲} = ۲ \rightarrow k = -۴ \end{aligned} \right.$$

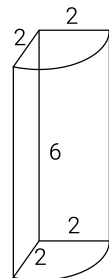
بنابراین معادلات دو ضلع مربع به صورت $y = ۲x - ۱$ و $y = ۲x - ۱$ است (باید ضرایب x و y در هر دو معادله خط یکسان باشد پس معادله $y = ۲x - ۱$ را در ۲ ضرب می‌کنیم).

$$\begin{aligned} &4x - 2y - 2 = 0 \\ &4x - 2y + 7 = 0 \end{aligned} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۲ - ۷|}{\sqrt{۱۶ + ۴}} = \frac{۹}{\sqrt{۲۰}} \rightarrow \text{مساحت مربع} = \left(\frac{۹}{\sqrt{۲۰}} \right)^۲ = \frac{۸۱}{۲۰} = ۴٫۰۵$$

توجه کنید فاصله دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ به دست می‌آید.

۱۵. گزینه ۱

شکل حاصل، یک ربع استوانه می‌باشد:



$$V = \frac{1}{۴} \times \pi \times ۲^۲ \times ۶ = ۶\pi$$

۱۶. گزینه ۳ برای توابع وارون‌پذیر f و g داریم: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ و $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

با توجه به راهنمای فوق داریم $(f^{-1} \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$ پس تابع وارون تابع $f^{-1} \circ g$ را می‌یابیم.

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{\sqrt[۵]{۴x^۳ - ۱}}{۲} = y \Rightarrow \sqrt[۵]{۴x^۳ - ۱} = ۲y \Rightarrow ۴x^۳ - ۱ = ۳۲y^۵$$

$$\Rightarrow x^r = \frac{32y^5 + 1}{4} = 8y^5 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8y^5 + \frac{1}{4}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{8x^5 + \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow (g^{-1} \circ f)(x) = \sqrt[3]{8x^5 + \frac{1}{4}}$$

حال داریم:

$$a = 8, b = \frac{1}{4}, n = 3, m = 5 \Rightarrow ab + mn = 8 \times \frac{1}{4} + 5 \times 3 = 17$$

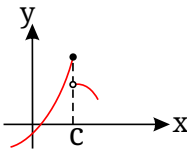
۱۷. گزینه ۳ تمام خطوط قائم بر دایره از یک نقطه ی ثابت یعنی از مرکز دایره می گذرند، پس کافی است مختصات مرکز دایره را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} f'_x = 0 &\rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 &\rightarrow 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \Rightarrow C \Big|_r^1 \end{aligned}$$

۱۸. گزینه ۴ نقطه‌ای ماکسیمم مطلق است که مقدار تابع در آن نقطه بزرگ‌تر یا مساوی مقدار تابع در همه نقاط دامنه باشد و نقطه‌ای مینیمم مطلق است که مقدار تابع در آن نقطه کوچک‌تر یا مساوی مقدار تابع در همه نقاط دامنه باشد.

نکته: اگر f در همسایگی C تعریف شده باشد و نقطه $M \Big|_{f(C)}^C$ اکسترمم مطلق باشد، در این صورت نقطه M اکسترمم نسبی تابع f نیز خواهد بود.

برای گزینه‌های دیگر مثال نقض زیر وجود دارد. در تابع $f(x)$ به شکل زیر، نقطه C ماکسیمم مطلق بوده ولی ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است و خط مماس نیز افقی نیست.



۱۹. گزینه ۲ برای آنکه تابع $g(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید عبارت زیر رادیکال تعریف شده باشد، یعنی عبارت داخل رادیکال همواره نامنفی باشد از طرفی می‌دانیم برای آنکه عبارت درجه دوم همواره نامنفی باشد باید $a > 0$, $\Delta \leq 0$ باشد.

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4(3a) \leq 0 \Rightarrow 12a \geq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{12}$$

در نتیجه کمترین مقدار a برابر $\frac{1}{12}$ می باشد.

۲۰. گزینه ۲

$$f(x) = (5x - 1)Q(x) + r \xrightarrow{\times 3} 3f(x) = 3(5x - 1)Q(x) + 3r$$

$$\Rightarrow 3f(x) = 3 \times 5 \left(x - \frac{1}{5}\right) Q(x) + 3r \xrightarrow{15Q(x)=Q'(x)} = \left(x - \frac{1}{5}\right) Q'(x) + 3r$$

۲۱. گزینه ۲ اگر A را پیشامد مرد بودن و B را پیشامد اینکه دارای تحصیلات دانشگاهی باشد، در نظر بگیریم، در این صورت مطلوب مسئله $P(B|A)$ خواهد بود که داریم:

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{25}{25 + 85} = \frac{25}{110} = \frac{5}{22}$$

توجه شود که پیشامد $(A \cap B)$ پیشامد این است که مرد بوده و دارای تحصیلات دانشگاهی باشد که طبق جدول تعداد این افراد ۲۵ نفر است. اما A پیشامد مرد بودن است که تعداد کل مردان طبق جدول بالا برابر $25 + 85 = 110$ است.

$$\text{تذکر: فرمول احتمال شرطی به صورت } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ و همچنین به صورت } P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \text{ قابل قبول است.}$$

۲۲. گزینه ۲ کافی است مقدار تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی به دست آوریم.

$$f(x) = 2x\sqrt{x} - x^r \Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} - 2x = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9x = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 9x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1, 4] \\ x = \frac{9}{4} \checkmark \end{cases}$$

ماکزیمم مطلق تابع را در فاصله $[1, 4]$ می‌خواهیم. مقدار تابع را در نقاط بحرانی‌اش پیدا می‌کنیم.

$$f(1) = 2 - 1 = 1$$

$$f(4) = 16 - 16 = 0$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = 2\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{108 - 81}{16} = \frac{27}{16}$$

۲۳. گزینه ۴ روش اول:

$$y = 2f(-2x + 1) - 3 \xrightarrow[\text{سه راه انتقال به بالا}]{+3} y = 2f(-2x + 1) \xrightarrow[\text{عرض نقاط نصف شود}]{\times \frac{1}{2}} y = f(-2x + 1) \xrightarrow[\text{طول نقاط در } -\frac{1}{2} \text{ ضرب شود}]{x \rightarrow -2x} y = f(4x + 1)$$

$$A(2, -1) \rightarrow A_1(2, 2) \rightarrow A_2(2, 1) \rightarrow A'(-1, 1)$$

روش دوم:

 نقطه $(2, -1)$ بر تابع اولیه واقع است:

$$-1 = 2f(-3) - 3 \rightarrow f(-3) = 1$$

 در تابع جدید ورودی f را برابر -3 قرار می‌دهیم.

$$4x + 1 = -3 \rightarrow \boxed{x = -1} \rightarrow y = f(-3) = 1 \rightarrow A' = (-1, 1)$$

۲۴. گزینه ۴

در گزینه ۴، داریم:

$$1, y = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{\times(-1)} y = -x^2 + 4x - 5$$

قرینه‌سازی نسبت به محور x

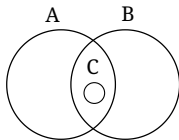
$$2, y = -x^2 + 4x - 5 \xrightarrow{+1} y = -x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$$

انتقال عمودی یک واحد به بالا

$$3, y = -(x - 2)^2 \rightarrow y = -(x + 2 - 2)^2 = -x^2$$

انتقال افقی دو واحد به چپ

۲۵. گزینه ۴ باتوجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون زیر را می‌توان رسم کرد.



با توجه به نمودار ون گزینه‌های ۱، ۲ و ۳، درست هستند و گزینه‌ی ۴، نادرست است.

۲۶. گزینه ۴

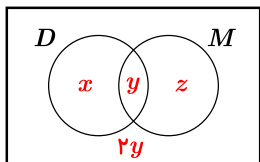
$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

 جمله عمومی یک دنباله هندسی با قدر نسبت q و جمله اول a_1 برابر است با:

$$\text{دنباله هندسی} = \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 5 \end{cases} \Rightarrow 2, 2 \times 5, 2 \times 5 \times 5, \dots$$

$$a_n = 2 \times 5^{n-1}$$

۲۷. گزینه ۲



می‌دانیم:

$$\left. \begin{aligned} n(D) = 32 &\rightarrow x + y = 32 \\ n(M) = 33 &\rightarrow y + z = 33 \end{aligned} \right\} \rightarrow x + z + 2y = 65$$

$$x + z + 3y = 70 \text{ : از طرفی}$$

خواهیم داشت:

$$n(M - D) = z = 33 - y = \boxed{28}$$

 ۲۸. گزینه ۱ چون $f(x)$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$f(-1) = 0 \rightarrow 2(-1)^3 + a(-1)^2 + 2(-1) + 3 = a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

پس ضابطه تابع برابر است با:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 3$$

حالا برای به دست آوردن باقی مانده تابع $f(x)$ بر $x - 2$ حاصل $f(2)$ را حساب می کنیم.

$$f(2) = 2(2)^2 + (2)^2 + 2(2) + 3 = 27$$

۲۹. گزینه ۱

$$n(S) = \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{1} + \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 60 + 120 = 180$$

برای وجود حرف نقطه دار باید «ف» به کار رود یا «ی» در جایی به جز آخر باشد، از پیشامد متمم استفاده می کنیم:

$$n(A') = \underbrace{\frac{3}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}}_{\text{اصلا ف و ی نداریم } \{ \text{ارس} \}} + \underbrace{\boxed{\text{ی}} \frac{3}{1} \times \frac{2}{2} + \boxed{\text{ی}} \frac{3}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1}}_{\text{«ی» داریم و «ی» آخر است}} = 18$$

$$P(A) = 1 - \frac{18}{180} = \frac{9}{10} \text{ پس}$$

۳۰. گزینه ۲ روش اول: از آن رو که صفرهای تابع $\alpha = 2$ و $\alpha = 2$ است. ضابطه تابع را می توان به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$ نوشت. از طرفی می بینیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می گذرد. پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می کند، پس داریم:

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

بنابراین ضابطه سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ است که پس از ساده سازی به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می شود. بنابراین $a = \frac{1}{4}$ و $b = -2$ لذا $4a + b = -1$

روش دوم: از آن جا که $f(0) = 3$ می توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ حال از روابط بین ریشه های معادله استفاده می کنیم:

$$P = \frac{c}{a} = 12 \rightarrow \frac{3}{a} = 12 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$S = -\frac{b}{a} \rightarrow -4b = 2 + 6 = 8 \rightarrow b = 2$$

پس $4a + b$ برابر -1 است.

پاسخنامه کلیدی

۱ . ۳	۶ . ۲	۱۱ . ۳	۱۶ . ۳	۲۱ . ۲	۲۶ . ۴
۲ . ۴	۷ . ۳	۱۲ . ۱	۱۷ . ۳	۲۲ . ۲	۲۷ . ۲
۳ . ۲	۸ . ۲	۱۳ . ۳	۱۸ . ۴	۲۳ . ۴	۲۸ . ۱
۴ . ۱	۹ . ۳	۱۴ . ۲	۱۹ . ۲	۲۴ . ۴	۲۹ . ۱
۵ . ۳	۱۰ . ۲	۱۵ . ۱	۲۰ . ۲	۲۵ . ۴	۳۰ . ۲

پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۴ در شب‌های صاف و بدون ابر، در مکانی که آلودگی نوری ندارد، در آسمان نواری مه‌مانند و کم نور، شامل انبوهی از اجرام می‌بینیم که این نوار کهکشان راه شیری نام دارد و یکی از بزرگ‌ترین کهکشان‌های شناخته شده است. کهکشان راه شیری، شکلی مارپیچی دارد که منظومه شمسی ما، در لبهٔ یکی از بازوهای آن تشکیل شده است.

۲. گزینه ۴ امواج سطحی مانند ریلی (R) و لاول (L) حاصل برخورد امواج درونی (اولیه یا ثانویه) با فصل مشترک لایه‌ها و نیز در سطح زمین ایجاد می‌شوند.

۳. گزینه ۳ حجم آب برداشت شده از آبخوان $V = 200 \text{ km}^3 \times 10 \text{ m} = 2 \times 10^9 \text{ m}^3$

$$\text{حجم فضاهای خالی } (m^3) = \frac{\text{حجم کل } (m^3)}{\text{تخلخل}} \Rightarrow \frac{30}{100} = \frac{x}{2 \times 10^9}$$

$\Rightarrow$ حجم فضاهای خالی (حجم آب تخلیه شده) $6 \times 10^8 \text{ m}^3$

$$Q = \frac{V}{t} \Rightarrow Q = \frac{6 \times 10^8}{30 \times 24 \times 3600} \Rightarrow Q = 231 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

۴. گزینه ۳ در آزمایشگاه‌های سنگ و خاک، مقاومت خاک و سنگ، مقدار نفوذپذیری و اندازهٔ دانه‌های تشکیل‌دهنده بررسی می‌شود.

۵. گزینه ۱ خاک لوم مخلوطی از ماسه، لای (سلیت) و رس است که برای کشاورزی بسیار مناسب است.

۶. گزینه ۳ برخی از عناصر مانند سلیسیم، از طریق آنزیم‌های حاوی این عنصر، با از بین بردن سوپراکسیدها، از وقوع سرطان پیشگیری می‌کنند. به‌همین دلیل برای سلامت انسان اهمیت زیادی دارند و به‌عنوان مادهٔ ضدسرطان شناخته می‌شوند.

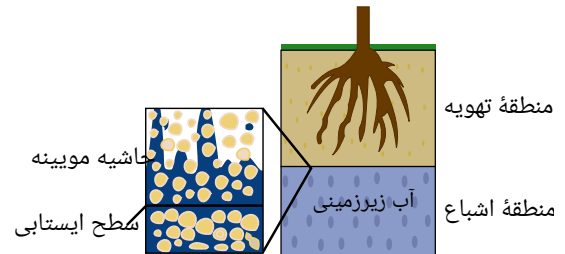
۷. گزینه ۱ بعضی از سنگ‌های دگرگونی مانند کوارتزیت و هورنفلس که مقاومت بیشتری دارند، می‌توانند تکیه‌گاه مناسبی برای سازه‌های سنگین باشند و برخی دیگر مانند شیست‌ها، سست و ضعیف بوده و برای پی‌سازه‌ها مناسب نیستند.

شیل و سنگ گچ نیز برای ساخت سازه‌ها مناسب نیستند؛ ولی جزء سنگ‌های رسوبی هستند.

۸. گزینه ۴ شکل مربوط به درهٔ ستارگان ژئوپارک قشم می‌باشد که به ثبت جهانی رسیده است.

۹. گزینه ۲ مهم‌ترین خواص گوهرها، سختی، رنگ و درخشش آن‌هاست. زبرجد (نوعی الیوبین) به‌رنگ سبز زیتونی و زمرد (نوعی سیلیکات بریلیم) به‌رنگ سبز از جمله کانی‌های گوهری هستند. ژپس و کلسیت به دلیل سختی پایین و نداشتن رنگ زیبا گوهر به حساب نمی‌آیند.

۱۰. گزینه ۳ در هنگام نفوذ آب به داخل زمین بخشی از آب نفوذی به سطح ذرات سنگ یا خاک می‌چسبد و منطقه تهویه را ایجاد می‌کند و بخشی از آب نفوذی به طرف عمق بیشتر حرکت می‌کند تا به سنگ بستر برسد و منطقه اشباع را ایجاد کند.

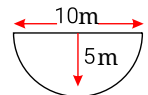


گزینه ۴ . ۱۱

عرض رودخانه در واقع همان قطر رودخانه است و از آنجا که برای محاسبه سطح مقطع نیم دایره باید شعاع را داشته باشیم ۱۰ را نصف می‌کنیم پس شعاع نیم دایره برابر با ۵ متر است

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times 3.14 \times (5)^2 = 39.25 \text{ m}^2$$

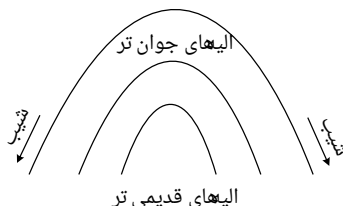
$$Q = A \cdot V = 39.25 \times 20 = 785 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$



۱۲. گزینه ۲ تعیین عیار فلز یا کیفیت ماده معدنی و شناسایی کانی‌های موجود در آنها توسط میکروسکوپ و یا دستگاه‌های تجزیه شیمیایی در آزمایشگاه صورت می‌گیرد.

۱۳. گزینه ۳ به علت ییلان منفی آب، در بسیاری از دشت‌های کشور از نظر توسعه بهره‌برداری آب‌های زیرزمینی به عنوان دشت ممنوعه اعلام شده است.

۱۴. گزینه ۲ تاق‌دیس نوعی چین خوردگی است. در این چین‌ها لایهٔ قدیمی‌تر در مرکز و لایهٔ جوان‌تر در حاشیه قرار می‌گیرد. باتوجه به شکل روبه‌رو در تاق‌دیس‌ها شیب لایه‌ها به سمت خارج چین است و از هم دور می‌شوند.



۱۵. گزینه ۱ شدت زمین لرزه با دور شدن از مرکز سطحی زمین لرزه کاهش می یابد (رابطه عکس).

بررسی سایر موارد:

گزینه (۲): فقط تعداد انگشت شماری از زمین لرزه ها، قبل از وقوع، پیش بینی شده اند.

گزینه (۳): بزرگی زمین لرزه یک مقیاس کمی و محاسبه ای می باشد.

گزینه (۴): بزرگی زمین لرزه را با کمک اطلاعات لرزه نگار تعیین می کنند.

پاسخنامه کلیدی

۱ . ۴	۴ . ۳	۷ . ۱	۱۰ . ۳	۱۳ . ۳
۲ . ۴	۵ . ۱	۸ . ۴	۱۱ . ۴	۱۴ . ۲
۳ . ۳	۶ . ۳	۹ . ۲	۱۲ . ۲	۱۵ . ۱